

# Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

## 11.1 - Hubungan Antar Vektor di Ruang Vektor

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 11 (November 2023)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan mampu:

- 1 menjelaskan karakteristik sub-ruang vektor dan kaitannya dengan kombinasi linier;
- 2 memverifikasi apakah sebuah himpunan vektor merentang suatu ruang vektor atau tidak;
- 3 memverifikasi apakah sebuah himpunan vektor pada suatu ruang vektor independen/bergantung linier atau tidak.

# Bagian 1: Sub-ruang vektor dan kombinasi linier

Ingat kembali bahwa **kombinasi linier vektor-vektor** didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan  $\mathbf{w} \in V$ . Maka  $w$  adalah kombinasi linear dari vektor  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  jika  $\mathbf{w}$  dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$$

dimana  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ .

## Contoh

Misal  $\mathbf{v}_1 = (3, 2, -1)$  dan  $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 3)$ . Maka:

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 2(3, 2, -1) + 3(2, -4, 3) = (12, -8, 7)$$

*adalah kombinasi linier dari  $\mathbf{v}_1$  dan  $\mathbf{v}_2$ .*

# Mendefinisikan kombinasi linier dari vektor

Diberikan sebuah vektor  $(5, 9, 5)$ . Tuliskan vektor tersebut sebagai kombinasi linier dari vektor:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4), \mathbf{v} = (1, -1, 3), \text{ dan } \mathbf{w} = (3, 2, 5)$$

# Mendefinisikan kombinasi linier dari vektor

Diberikan sebuah vektor  $(5, 9, 5)$ . Tuliskan vektor tersebut sebagai kombinasi linier dari vektor:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4), \mathbf{v} = (1, -1, 3), \text{ dan } \mathbf{w} = (3, 2, 5)$$

**Solusi:** Misalkan  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$  sedemikian rupa sehingga:

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan sistem linier:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 3 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 9 \\ 4k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 5 \end{cases}$$

Dengan eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 3, k_2 = -4, k_3 = 2$$

## Teorema

Jika  $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$  adalah himpunan vektor dalam ruang vektor  $V$ . Kemudian:

- 1 Himpunan  $W$  yang berisi semua kombinasi linier dari vektor-vektor dalam  $S$  adalah subruang dari  $V$ .
- 2  $W$  adalah subruang vektor terkecil dari  $V$  yang berisi vektor dalam  $S$ , yaitu, semua subruang lain yang berisi vektor juga berisi  $W$ .

# Bagian 2: Himpunan merentang



# Himpunan vektor yang membentuk subruang vektor

- Misalkan  $V$  adalah ruang vektor,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ .
- Misalkan  $W$  adalah subruang dari  $V$  sedemikian sehingga  $\forall \mathbf{w} \in W$ ,

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$$

di mana  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .

Maka,  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  dikatakan **merentang**  $W$ .

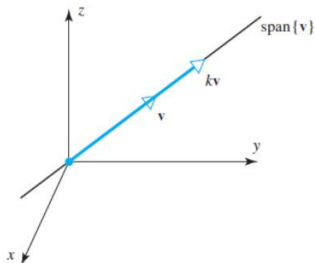
$S$  disebut **himpunan merentang**, dan dinotasikan sebagai:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ or } \text{span}(S)$$

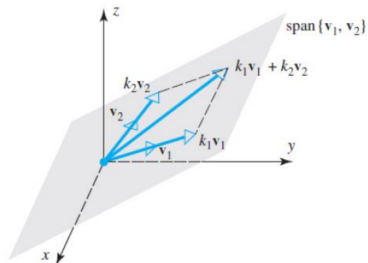
# Contoh: Ruang yang direntang oleh satu vektor

Misalkan  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  adalah vektor-vektor yang *tak-kolinier* di  $\mathbb{R}^3$ , dengan titik awalnya di titik asal, maka:

- $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  terdiri dari semua kombinasi linier  $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ , adalah bidang yang ditentukan oleh vektor  $\mathbf{v}_1$  dan  $\mathbf{v}_2$ .
- jika  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  adalah sebuah vektor di  $\mathbb{R}^2$  atau  $\mathbb{R}^3$ , maka  $\text{span}\{\mathbf{v}\}$  yang seluruhnya merupakan kelipatan skalar  $k\mathbf{v}$ , adalah garisnya ditentukan oleh  $\mathbf{v}$ .



(a)  $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$  is the line through the origin determined by  $\mathbf{v}$ .



(b)  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  is the plane through the origin determined by  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$ .

*Mengapa vektor satuan standar berikut merentang  $\mathbb{R}^3$ .*

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

*Mengapa vektor satuan standar berikut merentang  $\mathbb{R}^3$ .*

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Hal ini karena, setiap vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linier:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Dalam hal ini,  $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

*Polinom  $1, x, x^2, \dots, x^n$   $P_n$  merentang ruang vektor.*

Hal ini karena, setiap polinomial  $\mathbf{p} \in P_n$  dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linier dari yang merupakan kombinasi linier dari  $1, x, x^2, \dots, x^n$ .

Dalam hal ini,  $P_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ .

Tentukan apakah vektor-vektor berikut ini merentang  $\mathbb{R}^3$  !

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3), \mathbf{v}_2 = (4, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$$

Tentukan apakah vektor-vektor berikut ini merentang  $\mathbb{R}^3$  !

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3), \mathbf{v}_2 = (4, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$$

Misal  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  adalah vektor di  $\mathbb{R}^3$ , dan  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ .

Jika himpunan vektor  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  merentang di  $\mathbb{R}^3$ , maka semestinya:

$$(u_1, u_2, u_3) = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

Kita akan memeriksa apakah sistem linier berikut memiliki solusi.

$$2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = u_1, \quad -k_1 + k_2 - k_3 = u_2, \quad 3k_1 + 2k_2 + 8k_3 = u_3$$

## Latihan 4 (cont.)

Sistem linier memiliki matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 20 - 40 = 0$$

Oleh karena itu, tidak ada solusi untuk sistem linier, artinya  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  tidak mencakup  $\mathbb{R}^3$ .

**Latihan:** Cari sebuah vektor di  $\mathbb{R}^3$  yang bukan merupakan kombinasi linier dari  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , dan  $\mathbf{v}_3$ .



# Bagian 3: Independensi linier

Misalkan  $V$  adalah ruang vektor. Himpunan  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  dikatakan **independen linier** jika dan hanya jika kombinasi liniernya

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

memiliki **tepatnya satu solusi**, yang merupakan **solusi trivial**:

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$$

Sebaliknya, himpunan  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  dikatakan **tidak independen linier** atau **dependen linier**, jika kombinasi linier (1) memiliki **solusi non-trivial** (yaitu, solusi selain  $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$ ).

# Contoh himpunan independen/dependen linier (1)

Vektor-vektor  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ , dan  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  adalah vektor-vektor bebas linier pada  $\mathbb{R}^3$ .

# Contoh himpunan independen/dependen linier (1)

Vektor-vektor  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ , dan  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  adalah vektor-vektor bebas linier pada  $\mathbb{R}^3$ .

## Mengapa?

Perhatikan bahwa untuk skalar  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ , kita mempunyai:

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

yang ekuivalen dengan:

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Jelasnya, tidak ada solusi selain  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ , dan  $k_3 = 0$ .

Artinya  $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  bebas linier.

Dengan cara serupa kita dapat menunjukkan bahwa:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \text{ dan } \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

## Contoh himpunan independen/dependen linier (2)

Tentukan apakah vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1), \text{ dan } \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$$

bebas linier atau tidak!

**Solusi:**

Perhatikan bahwa:  $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ .

Ini berarti bahwa  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  tidak bebas linier.

## Contoh himpunan independen/dependen linier (3)

Tentukan apakah polinomial:

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \text{dan} \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

bebas linier atau tidak!

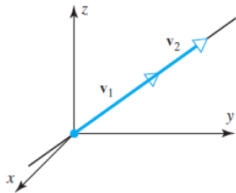
**Solusi:**

Perhatikan bahwa  $3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$ .

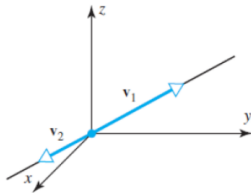
Oleh karena itu, vektor-vektornya bergantung linier (atau tidak bebas linier).

# Bagian 3: Interpretasi geometris

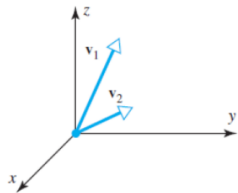
# Interpretasi geometris dari independensi linier dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$



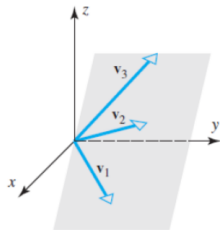
(a) Linearly dependent



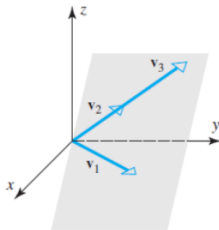
(b) Linearly dependent



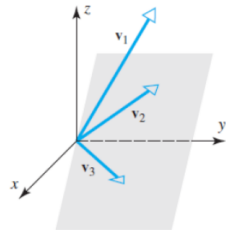
(c) Linearly independent



(a) Linearly dependent



(b) Linearly dependent



(c) Linearly independent



# Menentukan independensi/ketergantungan linier (1)

Tentukan ketergantungan linier dari vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \text{ dan } \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

# Menentukan independensi/ketergantungan linier (1)

Tentukan ketergantungan linier dari vektor:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \text{ dan } \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

**Solusi:**

Kita periksa apakah persamaan vektor  $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  memiliki solusi di  $\mathbb{R}$ .

Persamaannya setara dengan:

$$\begin{aligned} k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) &= (0, 0, 0) \\ (k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Selesaikan sistem:

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Memecahkan sistem menggunakan eliminasi Gaussian, kita mendapatkan:

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, \quad k_2 = -\frac{1}{2}t, \quad k_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Oleh karena itu, sistem memiliki solusi non-trivial, sehingga vektor  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  bergantung linier.

# Menentukan independensi/ketergantungan linier (2)

Tunjukkan bahwa polinomial membentuk himpunan vektor bebas linier dalam  $P_n$ .

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

**Solusi:**

Misalkan  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sedemikian rupa sehingga:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

Kita harus menunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari polinomial untuk  $x \in (-\infty, \infty)$  is:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Dari konsep Aljabar, kita tahu bahwa:

**Teorema**

*Setiap polinomial derajat bukan nol  $n$  memiliki paling banyak  $n$  akar.*

Ini mengakibatkan bahwa  $a_0 = a_1 = \dots = a_n$  (atau, polinomialnya adalah polinomial nol).

Jika tidak, itu adalah polinomial bukan nol, memiliki jumlah akar tak terbatas (yaitu,  $x \in (-\infty, \infty)$ ), bertentangan dengan teorema.

*bersambung...*